

سامانه بانک تستی

FlowRax

فـ لـ رـ اـ خـ

Math

@Flow_KonKour



@LoPRax_KonKour



کلیک کن وباماهمراه شو!

۱

با توجه به آن که $D_f = (-2, +\infty)$ ، پس $b = 2$ ، از طرفی، $f(\cdot) = \cdot$

$$a + \log_2^y = \cdot \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow \log_b^{(a+3)} = \log_2^y = 1$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲

$$\log_{\Delta^2}^{\gamma^2} = \frac{\log_{\gamma^2}^{\gamma^2}}{\log_{\gamma^2}^{\Delta^2}} = \frac{\log_{\gamma^2}^3 + \log_{\gamma^2}^{\Delta^2}}{\log_{\gamma^2}^{\gamma^2} + \log_{\gamma^2}^{\Delta^2}} = \frac{2 \log_{\gamma^2}^{\gamma^2} + 3 \log_{\gamma^2}^{\Delta^2}}{3 \log_{\gamma^2}^{\gamma^2} + \log_{\gamma^2}^{\Delta^2}} = \frac{2(\frac{5}{3}) + 3}{3(\frac{5}{3}) + 1} = \frac{\frac{10}{3} + 3}{5 + 1} = \frac{\frac{19}{3}}{6} = \frac{19}{18}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳

خط $x = -2$ مجانب قائم نمودار تابع f است. پس:

$$a(-2) + b = \cdot \Rightarrow b = 2a \Rightarrow f(x) = 1 - \log_{2a}^{(ax+2a)}$$

از طرف دیگر، $f(6) = -1$ ، بنابراین:

$$-1 = 1 - \log_{2a}^{(6a+2a)} \Rightarrow \log_{2a}^{8a} = 2 \Rightarrow 8a = (2a)^2 \Rightarrow 4a^2 = 8a \xrightarrow{a \neq 0} a = 2, b = 4$$

در نتیجه:

$$f(x) = 1 - \log_4^{(2x+4)} \Rightarrow f(3) = 1 - \log_4^{(6+4)} = 1 - \log_4^{10} = 1 - 3 = -2$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۴

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_{\gamma\Delta} = \log_2^{\frac{1}{2}} \log_3^{\frac{1}{3}} \log_4^{\frac{1}{4}} \times \dots \times \log_{\gamma^2}^{\frac{1}{\gamma^2}} \times \log_{\Delta^2}^{\frac{1}{\Delta^2}} = \log_{\gamma\Delta}^{\frac{1}{\gamma\Delta}} = \frac{1}{\gamma\Delta}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۵

$$A = \frac{4 \log_2^2}{2 \log_2^2 + \log_2^3} = \frac{\log_2^{2^4}}{\log_2^{2^2} + \log_2^3} = \frac{\log_2^{16}}{\log_2^4 + \log_2^3} = \frac{\log_2^{16}}{\log_2^{12}} = \log_2^{16/12}$$

توجه کنید که:

$$12 < 16 < 12^2 \Rightarrow \log_2^{12} < \log_2^{16} < \log_2^{12^2} \Rightarrow 1 < \log_2^{16/12} < 2 \Rightarrow 1 < A < 2$$

$$[A] = 1$$

از طرف دیگر:

بنابراین:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۶

$$\log_c a + \log_c b = \log_c(ab) \text{ نکته}$$

$$\log_b a = c \Rightarrow b^c = a \text{ نکته}$$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\log_3(x+1) + \log_3(x+9) = 2 \Rightarrow \log_3((x+1)(x+9)) = 2 \Rightarrow x^2 + 10x + 9 = 3^2 \Rightarrow x^2 + 10x = 0 \Rightarrow x(x+10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -10 \end{cases} \quad \times$$

مقدار $x = -10$ در معادله اصلی صدق نمی‌کند، پس فقط $x = 0$ ریشه معادله است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۷

نکته: نمودار توابع نمایی $y = a^x$ و $y = a^{-x}$ نسبت به محور y قرینه‌اند. $(y = (\frac{1}{a})^x)$

با توجه به نکته بالا، برای اینکه نمودار توابع $y = (2a + 1)^x$ و $y = (7a)^{-x}$ نسبت به محور y قرینه باشند، باید داشته باشیم:

$$2a + 1 = 7a \Rightarrow 5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۸

نکته: با فرض $x, a > 0$ و $a \neq 1$ داریم: $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

نمودار تابع $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(\frac{1}{a}, -1)$ عبور می‌کند، پس:

$$f(\frac{1}{a}) = -1 \Rightarrow \log_a \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{a} \Rightarrow a^1 = 2 \Rightarrow a = \pm \sqrt[4]{2}$$

با توجه به اینکه مبنای لگاریتم نمی‌تواند منفی باشد، فقط مقدار $a = \sqrt[4]{2}$ قابل قبول است.

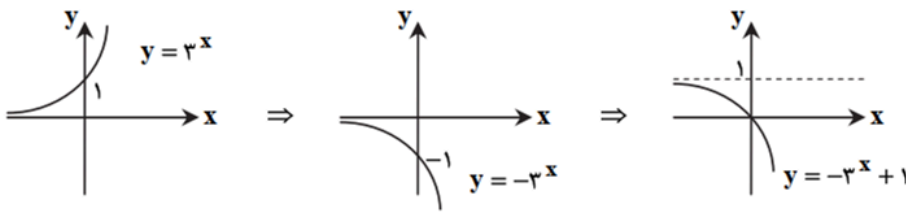
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۹

نکته: برای رسم نمودار $y = -f(x)$ باید نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x قرینه کنیم.

نکته برای رسم $y = f(x) + k$ ($k > 0$) باید نمودار $y = f(x)$ را k واحد به بالا منتقل کنیم.

برای رسم $y = -3^x + 1$ ابتدا نمودار $y = 3^x$ را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم تا نمودار $y = -3^x$ حاصل شود، سپس نمودار حاصل را یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم.



بنابراین گزینه ۱ پاسخ است.

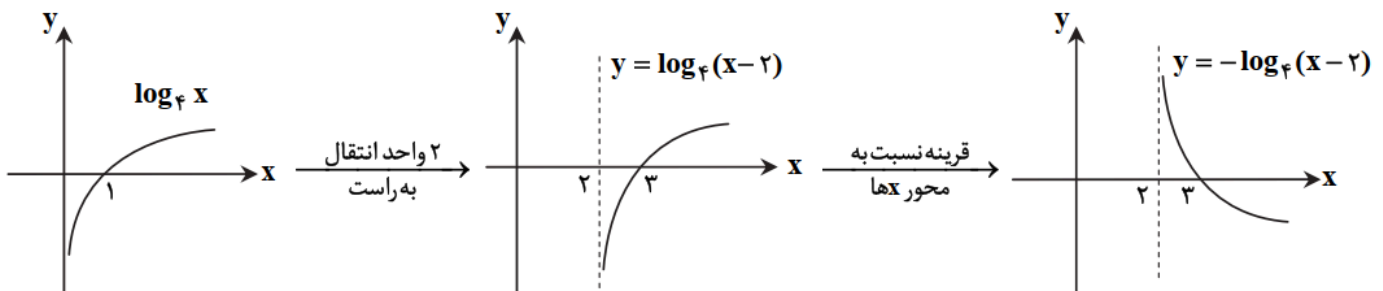
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۰

نکته ۱: برای رسم $y = f(x - a)$ ($a > 0$)، باید نمودار $y = f(x)$ را a واحد در امتداد محور x به راست منتقل می‌کنیم.

نکته ۲: برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x قرینه کنیم.

برای رسم $y = \log_4(x - 2)$ ابتدا نمودار $y = \log_4 x$ را ۲ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم تا نمودار $y = \log_4(x - 2)$ حاصل شود، سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:



بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۱

نکته: اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ ، آنگاه:

$$\log_a a = 1$$

نکته: اگر $a, b > 0$ و $a \neq 1$ ، آنگاه:

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

$$2 \log_4 x - \log_8 125 = \log_2 \sqrt{x} \xrightarrow{x>0} 2 \log_{2^2} \sqrt{x} - \log_{2^3} 5^3 = \log_2 \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{1}{2} \log_2 \sqrt{x} - \frac{3}{3} \log_2 5 = \log_2 \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \log_2 \sqrt{x} = \log_2 5 \Rightarrow \sqrt{x} = 5$$

بنابراین:

$$\log_5 \sqrt{x} = \log_5 5 = 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۲

نکته: $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$ ($b, a > 0$, $a \neq 1$)فرض سؤال را برابر با k در نظر می‌گیریم، پس داریم:

$$\log_{12}(a+b) = k \Rightarrow a+b = 12^k$$

$$2 + \log_3 a = k \Rightarrow \log_3 a = k-2 \Rightarrow a = 3^{k-2}$$

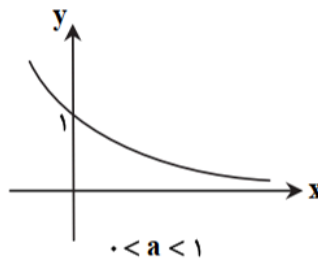
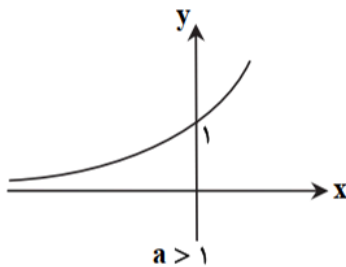
$$1 + \log_4 b = k \Rightarrow \log_4 b = k-1 \Rightarrow b = 4^{k-1}$$

اکنون مقدار خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{12^k}{3^{k-2} \times 4^{k-1}} = \frac{3^k \times 4^k}{3^{k-2} \times 4^{k-1}} = 3^2 \times 4^1 = 36$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۳

نکته: نمودار تابع $y = a^x$ ، به صورت زیر است:

با توجه به شکل، می‌توان فهمید که نمودار تابع f همان نمودار تابع $y = 2^{b-x}$ است که 2 واحد به بالا برده شده است، پس: $b = 2$.
از طرفی مطابق نمودار داریم:

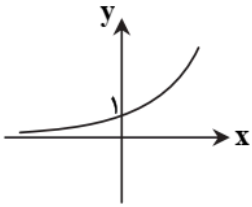
$$f(0) = 6 \Rightarrow 6 = 2 + 4a \Rightarrow a = 1$$

حال مقدار $\log_b(a+1)$ را به دست می‌آوریم:

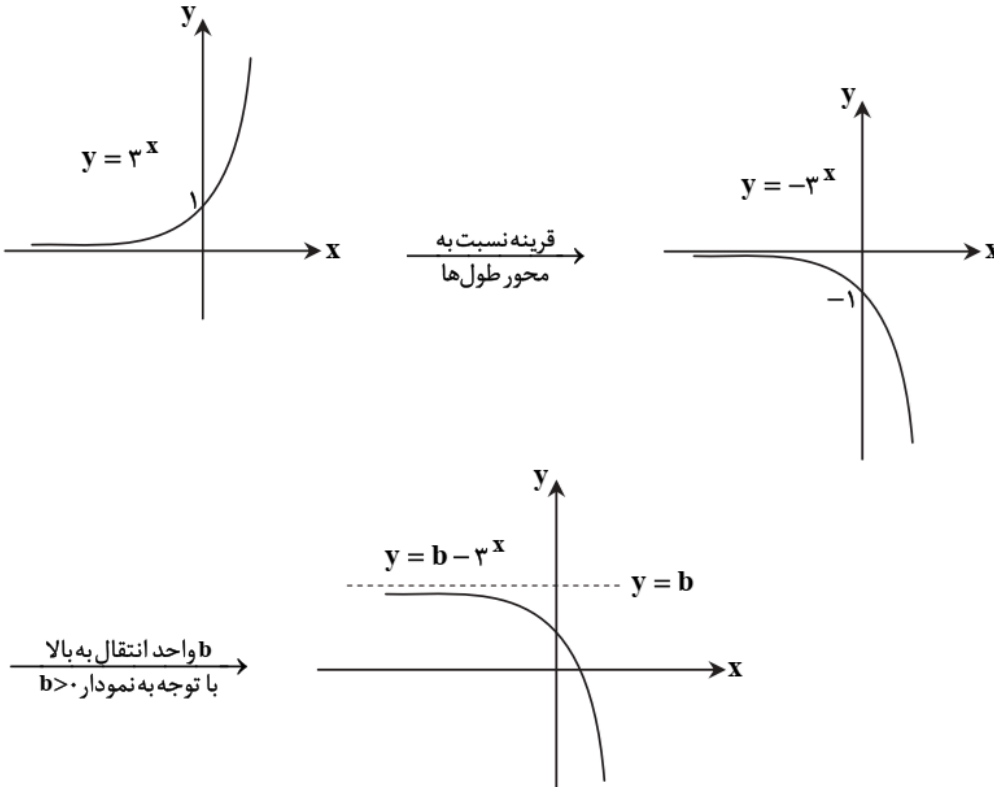
$$\log_b(a+1) = \log_2 2 = 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

نکته: نمودار تابع $f(x) = a^x$ با شرط $a > 1$ ، به شکل روبه‌رو است:



نکته: برای رسم نمودار $y = -f(x)$ ، کافیست نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.
نکته: اگر $k > 0$ ، برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد به سمت بالا منتقل کنیم.
ابتدا نمودار $y = b - 3^x$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار حاصل و نمودار صورت سؤال، می‌توان نتیجه گرفت $b = 2$.

اکنون برای به‌دست آوردن a ، کافی است نقطه $(0, -1)$ را در ضابطه تابع صدق دهیم:

$$f(0) = -1 \Rightarrow 2 - 3^{-a} = -1 \Rightarrow 3^{-a} = 3 \Rightarrow a = -1$$

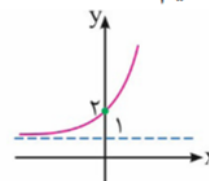
بنابراین:

$$a + b = 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

ابتدای ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{2^x + 2^{x+1} + 1}{2^x + 1} = \frac{(2^x)^2 + 2 \times 2^x + 1}{2^x + 1} = \frac{(2^x + 1)^2}{2^x + 1} = 2^x + 1 \Rightarrow$$



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۶

با توجه به نامعادله $\frac{1}{125} < 5^{2x+1} < 625$ داریم:

$$(1) \quad \frac{1}{125} < 5^{2x+1} \Rightarrow 5^{-3} < 5^{2x+1} \Rightarrow -3 < 2x+1 \Rightarrow -4 < 2x \Rightarrow -2 < x$$

$$(2) \quad 5^{2x+1} < 625 \Rightarrow 5^{2x+1} < 5^4 \Rightarrow 2x+1 < 4 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$$

از اشتراک بازه‌های به دست آمده از (۱) و (۲) مجموعه جواب نامعادله به صورت بازه $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ است که شامل اعداد صحیح -1 و 0 است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۷

تک‌پله: ابتدا با استفاده از داده‌های مسئله سعی می‌کنیم مقدار x را پیدا کنیم:

$$1 < A + B < 2 \Rightarrow 1 < \log_r^{(x-1)} + \log_r^r < 2 \Rightarrow 1 < \log_r^{r(x-1)} < 2$$

$$\Rightarrow \log_r^r < \log_r^{r(x-1)} < \log_r^r \Rightarrow 2 < rx - r < 4$$

$$\Rightarrow 5 < rx < 7 \Rightarrow \frac{5}{r} < x < \frac{7}{r} \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = 2$$

$$\log_{(rx-r)}\left(\frac{1}{x}\right) = \log_r\left(\frac{1}{r}\right) = \log_r^{r^{-1}} = -1$$

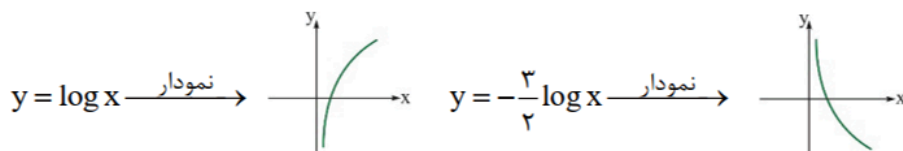
در نتیجه داریم:

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۸

ابتدا دامنه تابع f را به دست می‌آوریم و سپس ضابطه تابع f را ساده می‌کنیم ($x > 0$)

$$f(x) = \frac{1}{r} \log x - r \log x = -\frac{r}{r} \log x$$



و جواب گزینه ۲ می‌باشد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۱۹

برای به دست آوردن محل تقاطع تابع مورد نظر با محور طول‌ها، کافی است y را صفر قرار دهیم:

$$\frac{\frac{3x+6}{5}}{2} - 20(\sqrt{5})^{x+\frac{2}{3}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{3x}{5}+3}{2} - 20(5^{\frac{2}{3}})^{x+\frac{2}{3}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{3x}{5}}{2} \times 5^3 - 20(5^{\frac{2}{3}x+1}) - \frac{1}{5} = 0$$

$$\Rightarrow 125 \times \frac{\frac{3x}{5}}{2} - 20 \times 5 \times \frac{\frac{3x}{5}}{2} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow 25 \times \frac{\frac{3x}{5}}{2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{\frac{3x}{5}}{2} = \frac{1}{125} = 5^{-3} \Rightarrow \frac{3}{2}x = -3 \Rightarrow x = -2$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۰

$$4^x - 12 = 1 \cdot \frac{1 \cdot x}{1 \cdot x \log \Delta} \Rightarrow 4^x - 12 = \frac{1 \cdot x}{(1 \cdot \log \Delta)^x}$$

$$\Rightarrow 4^x - 12 = \frac{1 \cdot x}{\Delta^x} \Rightarrow 4^x - 12 = 2^x \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0 \Rightarrow (2^x - 4)(2^x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 3 = 0 & \text{غ.ق.ق} \\ 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 & \checkmark \end{cases}$$

$$\bullet \log_3 2 < 1 \Rightarrow [\log_3 2] = 0$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۱

گام اول: طبق درسنامه، شرطهای لازم برای به دست آوردن دامنه تابع لگاریتمی f را می‌نویسیم.

$$\bullet 0 < 3 - x \Rightarrow x < 3 \quad (1)$$

$$\bullet 0 < 3 + x \Rightarrow -3 < x \quad (2)$$

$$3 + x \neq 1 \Rightarrow x \neq -2 \quad (3)$$

گام دوم: دامنه تابع f ، اشتراک شرطهای (۱)، (۲) و (۳) است.

$$\xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} D_f = (-3, 3) - \{-2\}$$

پس در دامنه تابع f ، فقط عدد صحیح منفی -1 قرار دارد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۲

گام اول: مطابق نکته فوق، $f(x) = a^x$ و $g(x) = (\frac{1}{a})^x$ است؛ پس:

$$f(1) = a^1 = a, \quad g(-1) = (\frac{1}{a})^{-1} = a$$

گام دوم: مقادیر $f(1)$ و $g(-1)$ را در تساوی داده شده جای گذاری می‌کنیم تا a به دست آید.

$$g(-1)(3 - f(1)) = 2 \Rightarrow a(3 - a) = 2 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 & \text{غ.ق.ق} \\ a = 2 \end{cases}$$

توجه کنید که در تابع نمایی، پایه نمی‌تواند یک باشد، پس فقط $a = 2$ قابل قبول است؛ در نتیجه $g(x) = (\frac{1}{2})^x$ است.گام سوم: حاصل $g(-2)$ را حساب می‌کنیم.

$$g(-2) = (\frac{1}{2})^{-2} = 4$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۳

گام اول: با استفاده از ویژگی‌های لگاریتم حاصل $\log_{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{2}}{4}$ را ساده می‌کنیم و سعی می‌کنیم آن را بر حسب $\log 2$

بنویسیم. توجه کنید که $\frac{\sqrt{2}}{4} = 2^{\frac{1}{2}-2} = 2^{-\frac{3}{2}}$ و $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ است.

$$\log_{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{2}}{4} = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \log_5 2 = -3 \log_5 2 = -3 \times \frac{\log 2}{\log 5} = -3 \times \frac{\log 2}{\log 5 - \log 2} = \frac{-3 \log 2}{1 - \log 2}$$

گام دوم: طبق فرض سؤال، مقدار $\log 2 = 0/3$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\log_{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{-3(0/3)}{1-0/3} = \frac{-0/9}{0/7} = -\frac{9}{7}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۴

پاسخ تشریحی گام اول: در تابع $f(x) = a - 2^{ax-b}$ ، انتقال عمودی برابر a است. از طرفی طبق نمودار، معادلهٔ مجانب افقی $y = -4$ است، پس $a = -4$ می‌شود.

گام دوم: هم‌چنین تابع از نقطهٔ $(0, -20)$ می‌گذرد:

$$f(x) = \frac{-4}{a} - 2^{-4x-b} \xrightarrow{(0, -20)} -20 = -4 - 2^{-4 \times 0 - b}$$

$$\Rightarrow -20 = -4 - 2^{-b} \Rightarrow -16 = -2^{-b} \Rightarrow 16 = 2^{-b} \Rightarrow 2^4 = 2^{-b} \Rightarrow b = -4$$

گام سوم: حالا با جای‌گذاری $a = -4$ و $b = -4$ در $\log_{|a|} ab$ داریم:

$$\log_{|a|} ab = \log_4 16 = 2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۵

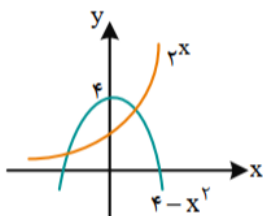
ویژگی‌های تابع نمایی استفاده می‌کنیم:

$$5^{1+xy} = 5^1 \times 5^{xy} = 5^1 \times (\Delta^y)^x = 5 \times 12^x = 5 \times 2 = 10$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۲۶

به کمک رسم نمودار داریم: $2^x = 4 - x^2$



دو نمودار، در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند، پس معادله ۲ ریشه دارد.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

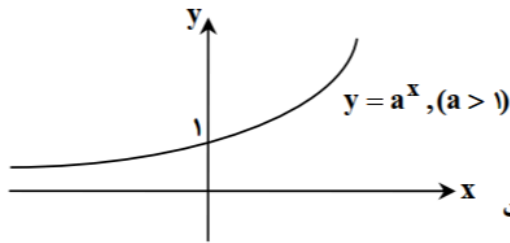
۲۷

$$f(2) = -2 \Rightarrow \log_a^2 = -2 \Rightarrow a^{-2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} = 2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{a^2} + 2\right) = f(2 + 2) = f(4) = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^4 = -4$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)



نکته: نمودار تابع $y = a^x$ با شرط $a > 1$ به صورت زیر است:

با توجه به شکل فوق مشاهده می شود که اگر $x > y$ باشد، آنگاه $a^x > a^y$ است

و برعکس ($a > 1$).
 $9^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}} = 3^{\sqrt{8}}$

با توجه به گزینه ها اگر عددی بخواهد بین $3^{\sqrt{8}}$ و $3^{\sqrt{11}}$ باشد، باید به صورت 3^k و $\sqrt{8} < k < \sqrt{11}$ باشد. گزینه ها را بررسی می کنیم:

گزینه ۱: $2/5 \notin (\sqrt{8}, \sqrt{11})$ ، $3^{2/5} = 3^{\sqrt{6/25}}$ ، گزینه ۲: $3 \in (\sqrt{8}, \sqrt{11})$ ، $27 = 3^3$ ،
 گزینه ۳: $\sqrt{12} \notin (\sqrt{8}, \sqrt{11})$ ، $9^{\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{12}}$ ، گزینه ۴: $\sqrt{20} \notin (\sqrt{8}, \sqrt{11})$ ، $9^{\sqrt{5}} = 3^{\sqrt{20}}$ ،
 بنابراین گزینه ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

نکته: به ازای $a, x > 0$ و $a \neq 1$ داریم: $\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$

نکته: اگر $\log_a x = \log_a y$ ، آنگاه $x = y$ و برعکس.

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\log_{\frac{1}{10}}(x^2 - 21) = -2 \Rightarrow x^2 - 21 = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} \Rightarrow x^2 - 21 = (10^{-1})^{-2} \Rightarrow x^2 - 21 = 100 \Rightarrow x^2 = 121 \Rightarrow x = \pm 11$$

هر دو جواب قابل قبول اند. پس گزینه ۲ پاسخ است.

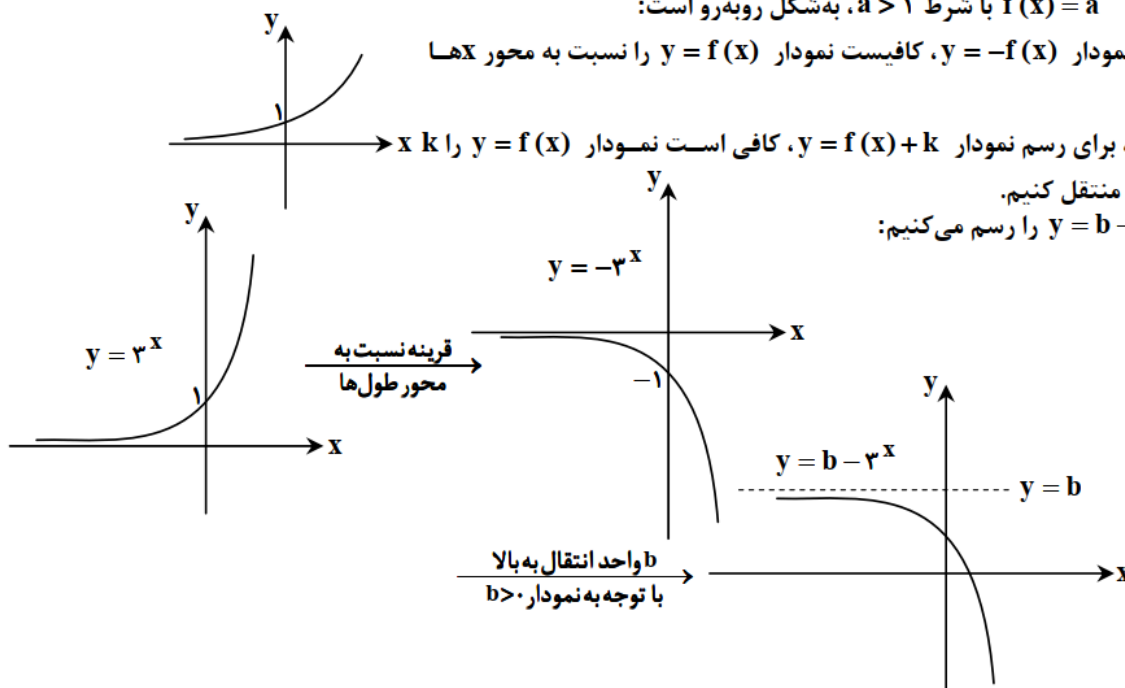
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

نکته: نمودار تابع $f(x) = a^x$ با شرط $a > 1$ ، به شکل روبه رو است:

نکته: برای رسم نمودار $y = -f(x)$ ، کافیست نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور x ها
 قرینه کنیم.

نکته: اگر $k > 0$ ، برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، کافی است نمودار $y = f(x)$ را k واحد به سمت بالا منتقل کنیم.

ابتدا نمودار $y = b - 3^x$ را رسم می کنیم:



با توجه به نمودار حاصل و نمودار صورت سؤال، می توان نتیجه گرفت: $b = 2$

اکنون برای به دست آوردن a ، کافی است نقطه $(0, -1)$ را در ضابطه تابع صدق دهیم:

$$f(0) = -1 \Rightarrow 2 - 3^{-a} = -1 \Rightarrow 3^{-a} = 3 \Rightarrow a = -1 \quad a + b = 1$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

نکته: اگر $a, b > 0$ و $a \neq 1$ باشد، آنگاه: $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$

۳۱

$$\log E = 11/8 + 1/5 M \xrightarrow{M=5/5} \log E = 11/8 + 1/5 \times 5/5 \Rightarrow \log E = 20/5 \Rightarrow E = 10^{20/5}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

توجه کنید که:

۳۲

$$A = \frac{\log_7^x + 1}{\log_7^5 (\log_7^x + \log_7^x)} = \frac{\log_7^x + 1}{\log_7^5 (\log_7^x + 1)} = \frac{1}{\log_7^5} = \log_7^x$$

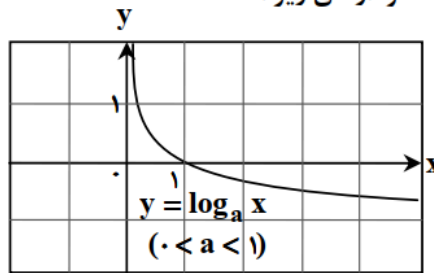
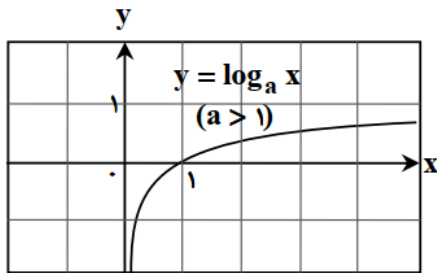
(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

نکته: برای اعداد حقیقی و مثبت a, b و c ($c \neq 1$) داریم:

۳۳

$$\log_c \left(\frac{a}{b} \right) = \log_c a - \log_c b$$

نکته: نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی، مشابه نمودارهای زیر است:

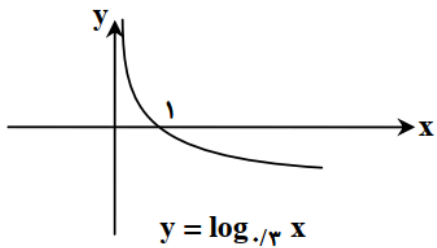


ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

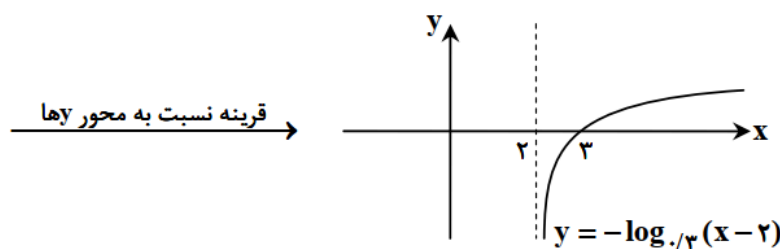
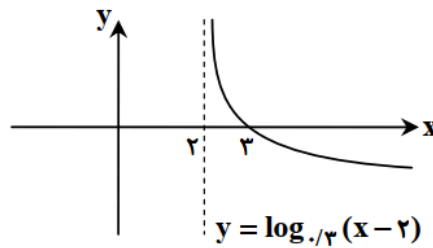
$$y = \log_{./3} \left(\frac{1}{x-2} \right) = \log_{./3} 1 - \log_{./3} (x-2) = 0 - \log_{./3} (x-2) = -\log_{./3} (x-2)$$

برای رسم تابع $y = -\log_{./3} (x-2)$ ، نمودار تابع $y = \log_{./3} x$ را ۲ واحد به راست منتقل کرده و نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم.

دقت کنید نمودار تابع $y = \log_{./3} x$ با توجه به اینکه $0 < 1/3 < 1$ ، نزولی است، بنابراین:



۲ واحد به راست



قرینه نسبت به محور yها

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۴

نکته: ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزادشده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزادشده آن زلزله برابر E در واحد ارگ (Erg) است که از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

$$b^a = c \Leftrightarrow \log_b c = a \quad (c > 0, b > 0, b \neq 1)$$

نکته: لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود، یعنی به جای $\log_{10} a$ می‌نویسیم $\log a$.

بزرگی زلزله در مقیاس ریشتر برابر $6/8$ است، پس:

$$M = 6/8 \Rightarrow \log E = 11/8 + \frac{3}{5} \times 6/8 \Rightarrow \log E = 11/8 + 10/2 \Rightarrow \log E = 22 \Rightarrow E = 10^{22}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۵

$$\text{نکته: } \log_c a + \log_c b = \log_c(ab) \quad (a, b, c > 0, c \neq 1)$$

$$\text{نکته: } \log_b a = c \Rightarrow b^c = a \quad (a, b > 0, b \neq 1)$$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\log_3(x+1) + \log_3(x+9) = 2 \Rightarrow \log_3((x+1)(x+9)) = 2 \Rightarrow x^2 + 10x + 9 = 3^2 \Rightarrow x^2 + 10x = 0 \Rightarrow x(x+10) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -10 \end{cases} \quad \times$$

مقدار $x = -10$ در معادله اصلی صدق نمی‌کند، پس فقط $x = 0$ جواب معادله است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۶

$$a - 2 = \log_2^8 - \log_2^4$$

$$a - 2 = \log_2^4$$

$$4^{a-2} = 4^{\log_2^4}$$

$$4^{\log_2^4} = 2^{\log_2^8} = 2^{\log_2^{2^2}} = 2^2 = 4$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$\text{اگر } a = \log_2^8 \text{ پس } a - 2 = \log_2^8 - 2 \text{ می‌دانیم } \log_2^4 = 2 \text{ پس می‌شود:}$$

$$\frac{a}{\log_b^a - \log_b^c} = \log_b^c \quad \text{طبق خواص لگاریتم داریم:}$$

با توجه به صورت سؤال داریم:

طبق ویژگی‌های لگاریتم:

۳۷

توجه داشته باشید که اگر $a > 1$ و $x, y > 0$ باشند داریم:

$$\log_a^x < \log_a^y \rightarrow x < y$$

$$2x+1 > 0 \rightarrow x > \frac{-1}{2}$$

$$2 \leq \log_3^{(2x+1)} < 3 \rightarrow \log_3^{2^2} \leq \log_3^{(2x+1)} < \log_3^{3^3}$$

$$\rightarrow 3^2 \leq 2x+1 < 3^3 \rightarrow 9 \leq 2x+1 < 27 \rightarrow 8 \leq 2x < 26$$

$$\rightarrow 4 \leq x < 13$$

که در این بازه ۹ عدد صحیح وجود دارد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

۳۸

پاسخ تشریحی گام اول (پیدا کردن a): تابع $y = a + 2^{(x-b)}$ ، a واحد بالاتر از تابع $y = 2^{x-b}$ است و مجانب افقی تابع $y = 2^{x-b}$ مانند تابع

$y = 2^x$ خط $y = 0$ است، با توجه به نمودار، مجانب افقی $y = a + 2^{(x-b)}$ خط $y = 1$ است، پس $a = 1$.

گام دوم (پیدا کردن b و به دست آوردن خواسته سؤال): با توجه به مقدار a، ضابطه به صورت $y = 1 + 2^{x-b}$ است، طبق نمودار نقطه $(0, 3)$ باید در این ضابطه صدق کند:

$$y = 1 + 2^{x-b} \xrightarrow[\substack{x=0 \\ y=3}]{\quad} 3 = 1 + 2^{0-b} \Rightarrow 2 = 2^{-b} \Rightarrow -b = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$a - b = 1 - (-1) = 2$$

پس خواسته سؤال برابر می‌شود با:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۳۹

پاسخ تشریحی گام اول (تحلیل سؤال): خواسته سؤال $\log \sqrt[5]{32}/32$ برحسب k است، با توجه به این که $32 = 2^5$ ، $100 = 10^2$ باید ابتدا

$\log 2$ را از روی $\log 125 = 9k$ به کمک $\log 5$ و ویژگی‌های لگاریتم به دست آوریم و سپس با توجه به این که $\log 10 = 1$ سؤال را حل کنیم.

گام دوم (به دست آوردن $\log 5$ و سپس $\log 2$): با توجه به $\log 125 = 9k$ و $125 = 5^3$ داریم:

$$\log 125 = 9k \Rightarrow \log 5^3 = 9k \Rightarrow 3 \log 5 = 9k \Rightarrow \log 5 = 3k$$

با توجه به این که $\log 2 = \log \frac{10}{5}$ و استفاده از ویژگی ۴ درس‌نامه:

$$\log 2 = \log \frac{10}{5} = \log 10 - \log 5 \Rightarrow \log 2 = 1 - 3k$$

$$\log \sqrt[5]{32}/32 = \log \left(\frac{32}{100} \right)^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log \left(\frac{32}{100} \right) = \frac{1}{5} (\log 32 - \log 100)$$

$$\Rightarrow \log \sqrt[5]{32}/32 = \frac{1}{5} (\log 2^5 - \log 10^2) \quad (*)$$

گام چهارم (به دست آوردن خواسته سؤال): برای رسیدن به جواب در رابطه $(*)$ (گام قبلی)، $\log 2 = 1 - 3k$ که از گام دوم به دست آمد را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\log \sqrt[5]{32}/32 = \frac{1}{5} (\log 2^5 - \log 10^2) \xrightarrow{\log 2 = 1 - 3k} \log \sqrt[5]{32}/32 = \frac{1}{5} (5(1 - 3k) - 2)$$

$$\Rightarrow \log \sqrt[5]{32}/32 = \frac{1}{5} (5 - 15k - 2) = 1 - 3k$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۰

پاسخ تشریحی گام اول (ساده کردن سمت چپ معادله): با توجه به این که مبنای لگاریتم‌ها یکسان است، به کمک ویژگی‌های لگاریتم سمت چپ

آن را ساده می‌کنیم:

$$\log_{\Delta} (x+1) + \log_{\Delta} (x-1) = 1 \Rightarrow \log_{\Delta} \overbrace{(x+1)(x-1)}^{\text{مزدوج}} = 1 \Rightarrow \log_{\Delta} (x^2 - 1) = 1$$

گام دوم (حل معادله): معادله به شکل $\log_a O = b$ درآمد، پس با توجه به حرکت چرخشی خواهیم داشت:

$$\log_{\Delta} x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = \Delta \Rightarrow x^2 = \Delta + 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\Delta + 1} \\ x = -\sqrt{\Delta + 1} \end{cases}$$

گام سوم (چک کردن جواب‌ها): $x = \sqrt{\Delta + 1}$ در دامنه هر دو لگاریتم موجود است پس قابل قبول است اما $x = -\sqrt{\Delta + 1}$ عبارت جلوی هر دو لگاریتم

را منفی می‌کند پس قابل قبول نیست، در نتیجه:

$$x = \sqrt{\Delta + 1} \Rightarrow \text{فقط یک جواب مثبت داریم}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۱

گام اول: عبارت داده شده را ضابطه تابعی مانند f به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$f(x) = \log_{1-x}(4-x^2)$$

گام دوم: حالا دامنه تابع را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 4-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2 \\ 1-x > 0 \Rightarrow x < 1 \\ 1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

پس داریم:

$$D_f = (-2, 1) - \{0\}$$

این مجموعه شامل فقط یک عدد صحیح است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۲

گام اول:

$$\log_5 3 = \log_a 2 \Rightarrow \log_3 5 = \log_3 a \Rightarrow a = 3^{\log_3 5} \Rightarrow a = 5^{\log_3 2}$$

گام دوم: حالا از طرفین تساوی بالا، در مبنای ۵ لگاریتم می گیریم:

$$\log_5 a = \log_5 5^{\log_3 2} = \log_3 2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

۴۳

گام اول: رابطه داده شده صورت سؤال را برای دو زلزله می نویسیم:

$$\log E_1 = 11/8 + 1/5 \Delta M_1, \quad \log E_2 = 11/8 + 1/5 \Delta M_2$$

$$\log E_2 - \log E_1 = 1/5 (\Delta M_2 - \Delta M_1) \Rightarrow \log \frac{E_2}{E_1} = 1/5 \Delta M$$

گام دوم: رابطه زلزله ۱ را از رابطه زلزله ۲ کم می کنیم:

$$\log 800 = 1/5 \Delta M$$

گام سوم: نسبت $\frac{E_2}{E_1}$ را برابر ۸۰۰ می گیریم:

$$\Rightarrow \log(8 \times 100) = \log 8 + \log 100 = 3 \log 2 + 2 = 3(1 - \log 5) + 2 = 5 - 3 \log 5 = 1/5 \Delta M$$

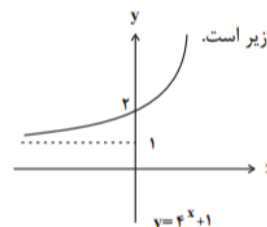
$$\Rightarrow \Delta M = \frac{5 - 3 \log 5}{1/5}$$

$$\Delta M = \frac{2/9}{1/5} \approx 1/93$$

گام چهارم: مقدار تقریبی $\log 5 = 0/7$ را جای گذاری می کنیم:

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+x} + 2^{x-x}; x \geq 0 \\ 2^{x-x} + 2^{x+x}; x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4^x + 1; x \geq 0 \\ 1 + 4^x; x \leq 0 \end{cases}$$



بنابراین $f(x) = 4^x + 1$ و نمودار آن به صورت زیر است.

۴۴

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

$$4^x - 12 = 10^{x(1-\log 5)} \Rightarrow 4^x - 12 = \frac{10^x}{10^{x \log 5}} \Rightarrow 4^x - 12 = \frac{10^x}{(10^{\log 5})^x} \Rightarrow 4^x - 12 = \frac{10^x}{5^x} \Rightarrow 4^x - 12 = 2^x \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$$

۴۵

$$\Rightarrow (2^x - 4)(2^x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 3 = 0 & \text{غ.ق.ق} \\ 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 & \checkmark \end{cases} \quad 0 < \log_7 2 < 1 \Rightarrow [\log_7 2] = 0$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - ساده)

با استفاده از تعریف لگاریتم داریم:

۴۶

$$\alpha = \log_9 4 \Rightarrow 4 = 9^\alpha \Rightarrow 2^2 = (3^2)^\alpha \Rightarrow 2^2 = (3^\alpha)^2 \Rightarrow 3^\alpha = 2$$

بنابراین مقدار خواسته شده برابر است با:

$$3^{\alpha+2} = 3^\alpha \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

می دانیم:

۴۷

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2$$

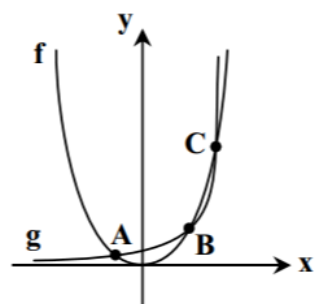
حال داریم:

$$\log_5 1/25 = \log_5 \frac{5}{4} = \frac{\log \frac{5}{4}}{\log 5} = \frac{\log 5 - \log 4}{\log 5} = \frac{1 - \log 2 - 2 \log 2}{1 - \log 2} = \frac{1 - 3a}{1 - a} = \frac{3a - 1}{a - 1}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

با ساده کردن معادله داریم:

۴۸



$$2^{x+1} = 2x^2 \Rightarrow 2^x \times 2^1 = 2x^2 \xrightarrow{\div 2} 2^x = x^2$$

حال با رسم دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 2^x$ ، مشاهده می شود که دو تابع f و g در نقاط A ، B و C متقاطع هستند، پس معادله $f(x) = g(x)$ سه ریشه حقیقی دارد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)

با توجه به نمودار تابع $f.g = (\frac{a}{3})^x$ مشخص می شود که $0 < \frac{a}{3} < 1$ است، بنابراین:

۴۹

$$0 < a < 3 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} \begin{cases} a = 1 & \text{غ.ق.ق (نیست)} \\ a = 2 & \checkmark \end{cases} \quad (f(x) = 1^x \text{ نمایی نیست})$$

$$f.g(x) = (\frac{2}{3})^x \Rightarrow (f.g)(-2) = (\frac{2}{3})^{-2} = \frac{9}{4} = 2/25$$

خواهیم داشت:

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - ساده)